Acta Sci. Math., 48 (1985), 401—416

Оценки для производных гармонических многочленов и сферических полиномов в L_p

С. М. НИКОЛЬСКИЙ и П. И. ЛИЗОРКИН

Профессору К. Тандори по случаю его 60-летия

Введение

В работах А. Л. Шагиняна [1] и Е. Г. Гольштейна [2] были получены оценки производных гармонических многочленов в равномерной метрике и рассмотрены некоторые их приложения. В данной работе подобные оценки получены в L_p. Попутно доказываются некоторые оценки, относящиеся к полиномам

$$T_m(\mu) = \sum_{k=0}^{m} Y_k(\mu)$$

по сферическим гармоникам $Y_k(\mu)$ (μ обозначает точку на единичной сфере σ евклидова пространства $\mathbf{R}^n$). Основная трудность заключалась в доказательстве неравенства

$$\|\text{Grad}\, T_m\|_{L_p(\sigma)} \leqq \tau_p m \|T_m\|_{L_p(\sigma)}, \quad 1 \leqq p \leqq \infty. \tag{1}$$

В § 1 статьи приводятся обозначения, вспомогательные сведения и предложения. В § 2 дается оценка нормальной составляющей, в § 3 — тангенциальной составляющей градиента гармонического многочлена. Общие оценки производных гармонического многочлена получены в § 4, как следствие оценок § 2 и § 3. Заключительный § 5 посвящен оценкам простейшего псевдодифференциального оператора на сфере.

В последующей нашей работе будут получены неравенства разных метрик для гармонических многочленов и рассмотрены связанные с этими оценками вопросы теории приближений.

Поступило 12 июля 1984 г.

§ 1. Вспомогательные сведения и предложения

Договоримся о следующих обозначениях: $\mathbf{R}^n$-евклидово пространство точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $\sigma^{n-1}=\sigma$ — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$ с центром в начале координат 0:

$$\sigma^{n-1} = \{x, x\in\mathbf{R}, |x| = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2} = 1\}.$$

Точки на σ, как правило, будем обозначать через μ, μ', μ^0, μ^1 и т.д. $C(\sigma)=C$ — пространство непрерывных функций на σ с нормой

$$\|f\|_C = \max_{x\in\sigma} |f(x)|$$

$L_p(\sigma)=L_p$ — пространство суммируемых в степени p, $1\leqq p<\infty$, функций с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \left\{\frac{1}{\Omega}\int_\sigma |f(\mu)|^p d\sigma\right\}^{1/p},$$

где $d\sigma$ — элемент объема на σ, а $\Omega=\Omega_{n-1}$ — объем сферы σ^{n-1} (при $p=\infty$ имеется ввиду обычная модификация). Пространство $L_p(\sigma)$ при $p=2$ превращается в гильбертово пространство $L_2(\sigma)$ со скалярным произведением

(2) $$(f, g) = \frac{1}{\Omega}\int_\sigma f(\mu)\, g(\mu)\, d\sigma.$$

В дальнейшем символ X обозначает одно из пространств C или L_p, $1\leqq p<\infty$.

Для заданной на σ функции $f(\mu)$, $\mathrm{Grad}\, f$ обозначает градиент f, а Df — оператор Лапласа-Бельтрами от f. Оператор Лапласа-Бельтрами имеет в качестве собственных значений на сфере σ числа $\lambda_m=m(m+n-2)$, $m=0, 1, 2, \ldots$. Каждое из чисел λ_m является собственным значением конечной кратности, т. е. ему соответствует подпростанство из собственных функций размерности N_m

$$N_m = (2m+n-2)\,\frac{(m+n-3)!}{m!\,(n-2)!}.$$

Эти собственные функции именуются сферическими гармониками порядка m и обозначаются через $Y_m(\mu)$. Фиксированный ортонормированный базис в подпространстве сферических гармоник порядка m будем записывать в виде

$$Y_m^l(\mu), \quad l = 1, 2, \ldots, N_m.$$

В этих обозначениях произвольной суммируемой на сфере σ функции $f(\mu)$ можно поставить в соответствие ее ряд Лапласа

(3) $$f(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(f, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{l=1}^{N_k} a_{k,l} Y_k^l(\mu)\Big)$$

где

$$a_{k,l} = (f, Y) = \frac{1}{\Omega} \int_\sigma f(\mu) Y_k^l(\mu) d\sigma,$$

(4)

$$Y_k(f, \mu) = \frac{\Gamma(\lambda)(k+\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_\sigma f(\mu^1) P_k^\lambda(\mu \cdot \mu^1) d\sigma(\mu^1), \quad \lambda = \frac{n-2}{2},$$

($\mu \cdot \mu^1$ обозначает скалярное произведение векторов 0μ, $0\mu^1$). Соответственно, произвольный многочлен $T_m(\mu)$ по сферическим гармоникам степени m запишется в виде

(5) $$T_m(\mu) = \sum_{k=0}^{m} Y_k(\mu),$$

где T_m и Y_k связаны формулой (4). Многочлен $T_m(\mu)$ будем именовать сферическим многочленом степени m.

Напомним еще, что функции $P_k^\lambda(t)$, $-1 \leqq t \leqq 1$ в (4) представляют собой полиномы Гегенбауэра, возникшие в результате ортогонализации степеней $1, t, t^2, \ldots$ на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1-t^2)^{\lambda-1/2}$. Считается, что $P_k^\lambda(t)$ стандартизованы соотношением

$$P_k^\lambda(t) = \frac{\Gamma(k+2\lambda)}{k!\Gamma(2\lambda)}, \quad 2\lambda = n-2.$$

(При $n=3$ речь идет о полиномах Лежандра: $P_k^{1/2}(t) = P_k(t)$.)

Перечисленные элементы гармонического анализа на сфере можно найти в любом из современных руководств, см., например, [4] (где полиномы P_k^λ обозначены через C_k^λ).

1.2. Сформулируем теперь результат, на который мы будем опираться. Он в существенном принадлемит Стейну [5] и Когбетлянцу [6] и в форме, эквивалентной нижеприведенной, содержится в статье Павелке [7].

Теорема А. *Пусть зафиксировано целое число* $r > (n-2)/2$. *Существует последовательность линейных ограниченных в* X *операторов* $\{V_m^{(r)}\}_{m=1}^\infty$ *со свойствами:*

1) *если* $f \in X$, *то* $V_m^{(r)} f$ *есть сферический полином степени не выше* $(r+1)m-1$;

2) *Найдется натуральное* N, *такое что если* $m > N$ *и* T_m*-сферический полином степени* m, *то*

(6) $$V_m^{(r)} T_m(\mu) = T_m(\mu);$$

3) *Если для* $f \in X$ *ввести оператор* $\sigma_k^{(r)}$ *усреднения по Чезаро порядка* r,

определенный равенством

(7) $$\sigma_k^{(r)}(f;\ x)=(A_k^r)^{-1}\sum_{j=0}^{k}A_{k-j}^rY_j(f;\ x)$$

(где $A_i^r=\binom{r+i}{i}$ *— биномиальные коэффициенты), то*

(8) $$V_m^r=a_{1,r}\sigma_{m-1}^{(r)}+a_{2,r}\sigma_{2m-1}^{(r)}+\ldots+a_{r+1,r}\sigma_{(r+1)m-1}^{(r)},$$

где коэффициенты $a_{i,r}$ *зависят от* m *несущественно в том смысле, что* $|a_{i,r}|\leqq A$*;*

4) *Существуют постоянные* M_r *и* K_r*, не зависящие от* m*, такие что*

(9) $$\|V_m^{(r)}f\|_X\leqq M_r\|f\|_X\quad (f\in X,\ m=1,2,\ldots)$$

(10) $$\|f-V_m^{(r)}f\|_X\leqq K_rE_m(f)_X\quad (f\in X,\ m\geqq N)$$

где через $E_m(f)_X$ *обозначено наилучшее приближение функции* f *сферическими многочленами степени* m *по норме* X.

Отметим еще следующие моменты, связанные с теоремой A. Оператор $\sigma_m^{(r)}$ представляется сверткой

$$\sigma_m^{(r)}(f;\ x)=\frac{1}{\Omega}\int_\sigma K_m^r(\mu\cdot\mu^1)f(\mu^1)d\sigma(\mu^1)$$

с ядром

(11) $$K_m^r(t)=(A_m^n)^{-1}\sum_{j=0}^{m}A_{m-j}^r\frac{j+\lambda}{\lambda}P_j^\lambda(t),$$

которое суммируемо по сфере σ, причем

(12) $$\int_\sigma|K_m^r((\mu\cdot\mu^1)|d\sigma(\mu^1)\leqq k_r\quad\left(r>\lambda=\frac{n-2}{2},\ m=0,1,2,\ldots\right).$$

(Ясно, что написанный интеграл не зависит от μ.) С учетом сказанного неравенство (9) уточняется

(13) $$\|V_m^{(r)}f\|_X\leqq(r+1)Ak_r\|f\|_X=M_r\|f\|_X.$$

1.3. В данном пункте будет доказана важная для дальнейшего вспомогательная оценка (неравенство (15)).

Обозначим через H_m подпространство сферических гармоник порядка m, а через $H_{\leqq m}$ — объединение подпространств H_k с $k\leqq m$: $H_{\leqq m}=\bigoplus_0^m H_k$. Для каждой фуксированной точки $\mu^0\in\sigma$ в H_k имеется единственная (с точностью до мультипликативной постоянной) сферическая гармоника, зависящая лишь от расстояния точки μ до μ^0 (или, по другому, от $\mu\cdot\mu^0$). Эта гармоника пропорциональна полиному $P_k^\lambda(\mu\cdot\mu^0)$. Линейная оболочка полиномов $P_k^\lambda(\mu\cdot\mu^0)$, $k=0,1,2,\ldots$,

$\ldots, m$, образует подпростанство в $H_{\leqq m}$, которое мы обозначим через $Q_m(\mu^0)$. Объединение полиномов из $Q_m(\mu^0)$ при всевозможных $\mu^0 \in \sigma$ обозначим через Q_m ($\equiv$зональные полиномы степени $\leqq m$).

Лемма 1. *Пусть в линейном пространстве $H_{\leqq m}$ задан линейный коммутирующий со сдвигом оператор S, обладающий свойством*

$$\|ST_m\|_{L_\infty} \leqq s_m \|T_m\|_{L_\infty} \quad \forall T_m \in H_{\leqq m}. \tag{14}$$

Тогда при $1 \leqq p \leqq \infty$ *справедливо неравенсто*

$$\|SU_m\|_{L_p} \leqq s_m \|U_m\|_{L_p} \quad \forall U_m \in Q_m. \tag{15}$$

Доказательство. Поскольку при $p=\infty$ (15) является непосредственным следствием условия (14), можно считать в дальнейшем $1 \leqq p < \infty$. Возьмем произвольный элемент $U_m \in Q_m$ и рассмотрим свертку

$$f(\mu) = \frac{1}{\Omega} \int_\sigma U_m(\mu \cdot \mu') g(\mu') d\sigma(\mu'), \tag{16}$$

где $g \in L_{p'}$, $(1/p)+(1/p')=1$, $p \in [0, \infty)$. Ясно, что функция $f(\mu)$ в (16) — сферический многочлен из $H_{\leqq m}$. Применяя к (16) оператор S, можно, очевидно, написать

$$Sf(\mu) = \frac{1}{\Omega} \int_\sigma SU_m(\mu \cdot \mu') g(\mu') d\sigma(\mu'). \tag{17}$$

В силу условия (14) леммы, имеем

$$\|Sf(\mu)\|_{L_\infty} \leqq s_m \|f\|_{L_\infty}.$$

Отсюда получим с помощью неравенстве Гёльдера

$$\begin{aligned} |Sf(\mu)| &\leqq \|Sf(\mu)\|_{L_\infty} \leqq s_m \|f\|_{L_\infty} \leqq \\ &\leqq s_m \left(\frac{1}{\Omega} \int_\sigma |U_m(\mu \cdot \mu')|^p d\sigma(\mu' \right)^{1/p} \|g\|_{L_{p'}} = s_m \|U_m\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_{p'}}. \end{aligned} \tag{18}$$

С другой стороны, из (17) вытекает

$$|Sf(\mu)| \leqq \|SU_m\|_{L_p} \|g\|_{L_{p'}}. \tag{19}$$

По свойствам, присущим неравенству Гёльдера, знак равенства в (19) при $1<p<\infty$ достигается на элементе $g \in L_{p'}$, для которого $|g|^{p'}$ пропорционально $|SU_m|^p$. Выберем коэффициент пропорциональности так, чтобы $\|g\|_{L_{p'}}=1$, т. е. положим

$$g(\mu') = \frac{|SU_m(\mu \cdot \mu')|^{p-1}}{\|SU_m(\mu \cdot \mu')\|_{L_p}^{p-1}} \cdot \operatorname{sign} SU_m(\mu \cdot \mu'). \tag{20}$$

При таком выборе g равенство в (19) будет иметь место и при $p=1$ (причем норма определяемой соотношением (20) функции g в L_∞ равна 1). Таким образом при всех $1 \leqq p < \infty$ получим из (19) (при указанном выборе функции g)

$$|Sf(\mu)| = \|SU_m\|_{L_p}.$$

Но тогда из неравенства (19), поскольку $\|g\|_{L_{p'}} = 1$, вытекает

$$\|SU_m\|_{L_p} \leqq s_m \|U_m\|_{L_p}. \tag{21}$$

Следует помнить, конечно, что функции SU_m и U_m в (21) зависят от $\mu \cdot \mu'$ и при вычислении нормы интегрирование проводится по μ'. Однако, зависимость от μ исчезает при интегрировании, поскольку операторы S и E коммутируют с вращением. Таким образом лемма 1 доказана полностью.

§ 2. Оценка нормальной составляющей градиента гармонического полинома на сфере σ в метрике $L_p(\sigma)$, $1 \leqq p \leqq \infty$

Любой гармонический в $\mathbf{R}^n$ степени m полином w_m можно записать в виде

$$w_m(x) = \sum_{k=0}^{m} r^k Y_k\left(\frac{x}{|x|}\right), \tag{22}$$

где $r = |x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$. Нормальная составляющая $\operatorname{grad} w_m$ запишется в виде ($\vec{n} = \vec{r}$)

$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\sigma = \operatorname{grad} w_m|_\sigma \vec{n} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial w_m}{\partial x_i}\right)_\sigma = \left.\frac{\partial w_m}{\partial r}\right|_{r=1}.$$

Следовательно, получим из (22)

$$\left.\frac{\partial w_m}{\partial r}\right|_{r=1} = \sum_{k=0}^{m} k Y_k(\mu).$$

Теорема 1. *Существует постоянная v_p, не зависящая от w, такая что*

$$\left\|\sum_{k=0}^{m} k Y_k(\mu)\right\|_{L_p} \leqq v_p m \left\|\sum_{k=0}^{m} Y_k(\cdot)\right\|_{L_p}, \quad 1 \leqq p \leqq \infty. \tag{23}$$

Замечание. Неравенство (23) получено Д. К. Угулавой в статье [3]. Однако соответствующее доказательство в [3] основывается на неопубликованном результатее автора. Мы воспроизводим здесь доказательство неравенства (23), опираясь на теорему А Стейна и др. (§ 1). Это доказательство само по себе несет в рамках данной статьи большую дополнительную нагрузку: препарируя его надлежащим образом, мы приходим к основной нашей оценке (1). Оценка (1) и (23) в совокупности решают задачи об оценке первых производных гармонического многочлена в L_p.

Доказательство. При $p=\infty$ это утверждение известно (см. [1], [2]). Воспользуемся этим. Именно, возьмем в качестве оператора S леммы 1 оператор

$$S\Big(\sum_{k=0}^{m} Y_k(\mu)\Big)=\sum_{k=0}^{m} kY_k(\mu). \tag{24}$$

Тогда из (23) (при $p=\infty$) и леммы 1 следует (см. (15)) неравенство

$$\|SU_m\|_{L_p} \leqq \nu_\infty m\|U_m\|_{L_p}, \quad 1\leqq p\leqq\infty, \tag{25}$$

где U_m — полином порядка m по зональным гармоникам, а ν_∞ — постоянная, с которой выполняется неравенство (23) при $p=\infty$.

Далее, в силу утверждения 2) теоремы А существует оператор $V_m^{(r)}$, такой что $V_m^{(r)}T_m=T_m$ для $m>N$. Согласно (8) и (11) оператор $V_m^{(r)}$ представляется в виде свертки

$$V_m^{(r)}f=\frac{1}{\Omega}\int\limits_\sigma G_m^{(r)}(\mu\cdot\mu')f(\mu')\,d\sigma(\mu'), \tag{26}$$

где (см. (8), (10), (11))

$$G_m^{(r)}(t)=a_{1,r}k_{m-1}^{(r)}(t)+a_{2,r}k_{2m-1}^{(r)}+\ldots+a_{r+1,r}k_{(r+1)n-1}^{(r)}. \tag{27}$$

Ядро $G_m^{(r)}(t)$ является полиномом (относительно $t=\mu\cdot\mu'$) по зональным гармоникам степени $\leqq[(r+1)m-1]$.

Применим к обеим частям равенства (26) с $f=T_m=\sum\limits_{k=1}^{m} Y_k$ оператор S

$$S(V_m^{(r)}T_m)=\frac{1}{\Omega}\int\limits_\sigma SG_m^{(r)}(\mu\cdot\mu')T_m(\mu')\,d\sigma. \tag{28}$$

Слева в (28) можно написать ST_m вместо $S(V_m^{(r)}T_m)$. Возьмем затем от обеих частей норму и справа воспользуемся неравенством Юнга. Получим

$$\begin{aligned}\|ST_m\|_{L_p} &\leqq \|SG_m^r(\mu\cdot\mu')\|_{L_1}\cdot\|T_m\| \leqq \nu_\infty[m(r+1)-1]\,\|G_m^r(\mu\cdot\mu'\|_{L_1}\cdot\|T_m\|_{L_p}\leqq\\ &\leqq \nu_\infty[m(r+1)-1](r+1)k_r\|T_m\|_{L_p}\leqq \nu_p\|T_m\|_{L_p}.\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь на втором шаге использована оценка (25) для зонального многочлена $G_m^{(r)}$ степени $[m(r+1)-1]$, на третьем — представление (27) и оценка (12). Следует подчеркнуть еще, что норма $\|G_m^{(r)}(\mu\cdot\mu')\|_{L_p}$, взятая по переменному μ', не зависит от μ.

Таким образом, неравенство (23) доказано с константой

$$\nu_p\leqq\nu_\infty(r+1)^2k_r.$$

§ 3. Оценка тангенциальной составляющей градиента гармонического полинома

Если w — гладкая функция в $\mathbf{R}^n$, то $\operatorname{grad} w$ на сфере σ можно разложить на две составляющие тангенциальную $\operatorname{grad}_\tau w|_\sigma$ и нормальную $\operatorname{grad}_n w$:

$$\operatorname{grad} w|_\sigma = \operatorname{grad}_\tau w|_\sigma + \operatorname{grad}_n w|_\sigma .$$

Очевидно, что

$$\operatorname{grad} w|_\sigma = \bar{r}\, \frac{\partial w}{\partial r}\bigg|_\sigma .$$

Нормальная составляющая градиента гармонического многочлена w_m степени m оценена по норме L_p, $1 \leqq p \leqq \infty$, в предыдущем параграфе. В силу леммы 2 можно пытаться при оценке $\operatorname{grad}_\tau w_m$ воспользоваться той же схемой.

Лемма 2. *Пусть $w(x)$ — гармонический многочлен степени m и $\operatorname{grad}_\tau w|_\sigma$ — тангенциальная составляющая $\operatorname{grad} w$ на сфере σ. Тогда*

$$\|\operatorname{grad}_\tau w_m\|_{L_\infty(\sigma)} \leqq m\, \|w_m\|_{L_\infty(\sigma)} . \tag{30}$$

Доказательство. На сфере σ гармонический полином $w(x)$ превращается в сферический полином $T_m(\mu)$. Ясно, что составляющая $\operatorname{grad}_\tau w_m|_\sigma$ совпадает со сферическим градиентом $T_m(\mu)$

$$\operatorname{grad}_\tau w_m|_\sigma = \operatorname{Grad} T_m(\mu).$$

Зафиксируем точку $\mu^0 \in \sigma$. Проведем через нее по σ геодезическую окружность Γ в направлении $\operatorname{Grad} T_m(\mu^0)$. На окружности Γ полином $T_m(\mu)$ превращается в тригонометрический многочлен степени m, $\operatorname{Grad} T_m(\mu)$ совпадает с производной этого многочлена по дуге. Поэтому по неравенству Бернштейна

$$|\operatorname{Grad} T_m(\mu^0)| \leqq m \max_{\mu \in \Gamma} |T(\mu)|. \tag{31}$$

Заменяя в (31) $\max\limits_{\mu \in \Gamma} |T_m(\mu)|$ на $\max\limits_{\mu \in \sigma} |w_m(\mu)|$ и пользуясь произвольностью μ^0, получим

$$\|\operatorname{Grad} T_m\|_{L_\infty} \leqq m \|T_m\|_{L_\infty} . \tag{32}$$

Это неравенство записывается в виде (30) и лемма 2 доказана.

Наличие неравенства (30) не позвольяет, однако, непосредственно использовать лемму 1. Это вызвано тем, что рассматриваемый оператор $\operatorname{Grad} T_m$ — векторнозначен. Поэтому приходится несколько модифицировать рассуждения леммы 1. Будем пользоваться тем, что для любого поля единичных векторов $e(\mu)$ на сфере справедливо соотношение

$$|\operatorname{Grad} T_m(\mu) \cdot e(\mu)| \leqq |\operatorname{Grad} T_m(\mu)|.$$

Поэтому в силу (32)

(33) $$\|\mathrm{Grad}\, T_\mu(\cdot)\cdot e(\cdot)\|_{L_\infty} \leqq m\|T_m\|_{L_\infty}.$$

Зафиксируем на сфере σ сферическую систему координат $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \varphi$, $0\leqq\theta_i\leqq\pi$, $i=1, \dots, n-2$, $0\leqq\varphi<2\pi$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \cos\theta_1\\
\mu_2 &= \sin\theta_1\cos\theta_2\\
\mu_3 &= \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mu_{n-1} &= \sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-2}\cos\varphi\\
\mu_n &= \sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1}\sin\varphi
\end{aligned}$$

При этом с каждой точкой $\mu\in\sigma$ будет связан репер $e_{\theta_1}(\mu), e_{\theta_2}(\mu), \dots, e_{\theta_{n-2}}(\mu)$, $e_\varphi(\mu)\equiv e_{\theta_{n-1}}$ ортонормированных векторов, направленных вдоль соответствующих координатных линий, проходящих через μ.

Действуя так же, как и при доказательстве леммы 1 (см. (16)), напишем

(16′) $$f(\mu)=\frac{1}{\Omega}\int_\sigma U_m(\mu\cdot\mu')\,g(\mu')\,d\sigma(\mu').$$

Рассмотрим проекцию $\mathrm{Grad}\, f(\mu)$ на один из базисных векторов $e_{\theta_j}(\mu)$. Очевидно, что

(17′) $$\mathrm{Grad}\, f(\mu)e_{\theta_j}(\mu)=\frac{1}{\Omega}\int_\sigma \mathrm{Grad}\, U(\mu\cdot\mu')e(\mu)g(\mu')\,d\sigma(\mu').$$

Отсюда с помощью (33) и неравенства Гёльдера получим (обозначив $\mathrm{Grad}\, f(\mu)\cdot e_{\theta_j}(\mu)=G_i(\mu)$)

(18′) $$\begin{aligned}
|G_i(\mu)| &\leqq \|G_i(\mu)\|_{L_\infty}\leqq m\,\|f(\mu)\|_{L_\infty}\\
&\leqq m\left(\frac{1}{\Omega}\int_\sigma |U_m(\mu\cdot\mu')|^p\,d\sigma(\mu')\right)^{1/p}\|g\|_{L_{p'}}=m\,\|U_m\|_{L_p}\|g\|_{L_p}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, из (17’) вытекает

(19′) $$|G_i(\mu)|\leqq\left(\frac{1}{\Omega}\int_\sigma |\mathrm{Grad}\, U_m(\mu\cdot\mu')\cdot e_j(\mu)|^p\,d\sigma(\mu')\right)^{1/p}\|g\|_{L_{p'}}.$$

Рассуждая, как и при доказательстве леммы 1, можно подобрать g так, что в (19’) будет выполнятся равенство. При таком выборе g из (18’), (19’) следует

(34) $$\left\{\frac{1}{\Omega}\int_\sigma |\mathrm{Grad}\, U_m(\mu\cdot\mu')\cdot e_j(\mu)|^p\,d\sigma(\mu')\right\}^{1/p}\leqq m\|U_m\|_{L_p},\quad j=1,\dots,n-1.$$

Как известно, справедливо арифметическое неравенство

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j^p \geqq c\Big(\sum_{j=1}^{n-1} a_j^2\Big)^{p/2}, \quad a_j \geqq 0, \quad p \geqq 1. \tag{35}$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^{n-1} |\mathrm{Grad}\, U_m(\mu\cdot\mu')\cdot e_j(\mu)|^2 = |\mathrm{Grad}\, U_m(\mu\cdot\mu')|^2, \tag{36}$$

то из (34), (35) с учетом (36) следует неравенство

$$\|\mathrm{Grad}\, U_m\|_{L_p} \leqq \tau_p^3 m\|U_m\|_{L_p}, \quad 1 \leqq p \leqq \infty. \tag{37}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Лемма 3. *Для зонального многочлена U_m степени $\leqq m$ справедливо неравенство типа Бернштейна* (37).

Теперь мы можем доказать интересующую нас оценку тангенциальной составляющей градиента гармонического полинома.

Теорема 2. *Пусть $w_m(x)$ — гармонический многочлен степени $\leqq m$. Тогда его сужение $T_m(\mu)$ на σ подчиняется оценке*

$$\|\mathrm{Grad}\, T_m\|_{L_p} \leqq \tau_p m\|T_m\|_{L_p}, \quad 1 \leqq p \leqq \infty, \tag{38}$$

где постоянная $\tau_p > 0$ не зависит от m.

Замечание 1. Представляет интерес вычисление постоянной τ_p в (38). Согласно лемме 2 имеем $\tau_\infty = 1$. В неравнестве (37) постоянная τ_p^3 равна единице при $p=2, p=\infty$. Если бы удалось показать, что $\tau_p^3 = 1$ при всех $1 \leqq p \leqq \infty$, это открыло бы путь к получению хороших оценок для τ_p. Думается, не исключена возможность того, что $\tau_p = 1$.

Доказательство. Рассуждаем по схеме доказательства теоремы 1. Подставляя в (26) вместо f сферический полином T_m и применяя к обеим частям равенства оператор Grad, получим вместо (28)

$$\mathrm{Grad}\, T_m(\mu) = \frac{1}{\Omega}\int_\sigma \mathrm{Grad}_\mu G_m^{(r)}(\mu\cdot\mu')T_m(\mu')\,d\sigma(\mu').$$

Ясно, что

$$|\mathrm{Grad}\, T_m(\mu)| \leqq \frac{1}{\Omega}\int_\sigma |\mathrm{Grad}_\mu G_m^{(r)}(\mu\cdot\mu')|\,|T_m(\mu')|\,d\sigma(\mu'). \tag{39}$$

Возьмем от обеих частей неравенства L_p-норму и справа воспользуемся неравенством Юнга. По тем же соображениям, что и в выкладке (29), имеем

(40)

$$\|\mathrm{Grad}\, T_m\|_{L_p} \leqq \|\mathrm{Grad}\, G_m^{(r)}(\mu\cdot\mu')\|\cdot\|T_m\|_{L_p} \leqq \tau_1^3\,[m(r+1)-1]\,\|G_m^{(r)}(\mu\cdot\mu')\|_{L_1}\cdot$$
$$\cdot\|T_m\|_{L_p} \leqq \tau_1^3 k_r (r+1)^2 m\,\|T_m\|_{L_p}.$$

На втором шаге здесь мы воспользовались неравенством (37) при $p=1$. Неравенсто (38) (а следовательно и теорема 2) доказаны с постоянной $C_p \leqq \leqq \tau_1^3 k_r (r+1)^2$.

§ 4. Оценки производных гармонического многочлена

Мы подошли к основному результату данной статьи, который является следствием теорем 1 и 2:

Теорема 3. *Пусть $w_m(x)$ — произвольный гармонический многочлен степени $\leqq m$ от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда при $1 \leqq p \leqq \infty$ справедлива оценка*

(41) $$\|\mathrm{grad}\, w_m(x)\|_{L_p(\sigma)} \leqq c_p m \|w_m(x)\|_{L_p(\sigma)},$$

где постоянная C_p не зависит от m.

Из теоремы 3 можно извлечь ряд следствий.

Во многих вопросах приходится иметь дело не с $\mathrm{grad}\, w_m$, а с частными производными $\partial w_m/\partial x_j$, $j=1, \dots, n$. Ясно, что из оценки (41) следует, что

(42) $$\left\|\frac{\partial w_m}{\partial x_j}\right\|_{L_p(\sigma)} \leqq c_p \|w_m\|_{L_p(\sigma)}, \quad j=1, \dots, n.$$

Более того, поскольку частные производные

$$D^\alpha w_m(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} w_m(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_n,$$

сами являются гармоническими многочленами, из (42) по индукции получим

(43) $$\|D^\alpha w_m\|_{L_p(\sigma)} \leqq c_p^{|\alpha|}(m-|\alpha|)(m-|\alpha|+1)\dots m\|w_m\|_{L_p(\sigma)} \leqq (c_p m)^{|\alpha|}\|w_m\|_{L_p(\sigma)}.$$

Оценки (41—43) можно обобщить на случай L_p-норм, вычисляемых по сфере σ_R произвольного радиуса R. Более того, можно перейти к L_p-нормам по шару $Ш_R$, ограниченному сферой σ_R. Это открывает путь для получения соответствующих оценок для произвольных гармонических многочленов в областях $\mathbf{R}^n$. На этом пути решаются некоторые вопросы теории приближений, которым посвящена наша статья, упомянутая во введении.

§ 5. О псевдодифференциальных операторах первого порядка на сфере. Оценки оператора Λ и его степеней

В предыдущих параграфах мы использовали дифференциальную операцию первого порядка на сфере — $\mathrm{Grad} f$. Эта операция имеет локальный характер (т. е. вычисления значения $\mathrm{Grad} f$ в точке μ требуется знать значения f в как угодно малой окрестности μ) и коммутирует с вращением. К сожалению она векторнозначна и это не всегда удобно.

Известно, что на сфере не существует скалярнозначных дифференциальных операторов первого порядка, коммутирующих с вращением. Единственным (с точностью до мультипликативной постоянной) дифференциальным оператором второго порядка, инвариантным относительно вращений, является оператор Лапласа—Бельтрами.

Рассмотрим некоторые псевдодифференциальные операторы первого порядка на σ, полезные в ряде вопросов. Прежде всего скажем еще несколько слов об операторе S из § 2.

Оператор S можно опеределить как мультипликаторный оператор, который функции

$$f(\mu) \sim \sum_{m=0}^{\infty} Y_m(f, \mu) \tag{44}$$

ставит в соотвествие функцию

$$Sf(\mu) \sim \sum_{m=0}^{\infty} mY_m(f, \mu). \tag{45}$$

Он возникает в результате таких действий. Сначала по функции f с разложением (45) строится гармоническая функция

$$u(\mu, r) \sim \sum_{m=0}^{\infty} r^m Y_m(f, \mu).$$

Вычисляя нормальную производную от u на сфере, получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\sigma = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} mr^{m-1} Y_m(f, \mu)|_\sigma = Sf.$$

Мы видим, что оператор Sf связан с дифференциальной операцией первого поряадка — дифференцированием гармонического продолжения f по нормали. Ясно, что для вычисления значения Sf в точке $\mu \in \sigma$ требуется знать значения f на всей сфере.

Мультипликаторное определение S, выраженное соотношениями (44), (45), можно выразить равенством

$$Y_m(Sf, \mu) = mY_m(f, \mu), \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{46}$$

На этом языке оператор Лапласа—Бельтрами D характеризуется равенством

$$Y_m(Df, \mu) = m(m+n-2)Y_m(f, \mu),$$

а его степени

$$Y_m(D^\alpha f, \mu) = m^\alpha(m+n-2)^\alpha Y_m(f, \mu). \tag{47}$$

(Отметим, что определение (47) действует и при отрицательных α на функциях f с нулевым средним значением на сфере). При натуральных $\alpha=k$, $k=1, 2, \ldots$, равенство (47) определяет дифференциальный оператор D^k, для которого, конечно, выполняется свойство локальности. При нецелых $\alpha>0$ оператор D^α — псевдодифференциальный.

Рассмотрим, в частности, оператор $\Lambda=\sqrt{D}$. Из его определения

$$Y_m(\Lambda f, \mu) = \lambda_m Y_m(f, \mu), \quad \lambda_m = \sqrt{m(m+n-2)}$$

видно, что он близок оператору S в том смысле, что

$$\lambda_m \sim m \quad \text{при больших} \quad m.$$

Это обстоятельство позволяет перенести оценки, полученные в § 2 для оператора S, на оператор Λ. Именно, справедлива

Теорема 4. *Для любого сферического полинома $T_m(\mu)$ степени m справедлива оценка*

$$\|\Lambda T_m\|_{L_p} \leqq Cm\|T_m\|_{L_p}, \quad 1 \leqq p \leqq \infty,$$

где постоянная C не зависит от m.

Для доказательства теоремы 4 используем известный прием (см. [8], стр. 465), основанный на следующей лемме (в которой n обозначает размерность рассматриваемого пространства $\mathbf{R}^n$).

Лемма 4. *Пусть для функции $\omega(t)$, $t\leqq 0$, справедливо разложение по формуле Тейлора*

$$\omega(t) = 1+\omega'(0)t+\ldots+\frac{\omega^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}+\frac{\omega^{(n)}(\xi)}{n!}t^n, \quad 0<\xi<t, \tag{48}$$

причем $|\omega^{(n)}(t)|\leqq c_0$ при $0\leqq t\leqq n-2$, где c_0 — фиксированная постоянная. Тогда последовательность

$$\{\omega_m\}_{m=0}^\infty, \quad \omega_0 = 0, \quad \omega_m = \omega\left(\frac{n-2}{m}\right)$$

является p-мультипликатором рядов Лапласа, т. е. если f — произвольная функция из $L_p(\sigma)$, $1\leqq p\leqq\infty$, и

$$f(\mu) \sim \sum_{m=0}^\infty Y_m(f, \mu),$$

то выражение

$$\sum_{m=0}^{\infty} \omega_m Y_m(f, \mu)$$

представляет собой ряд Лапласа вполне определенной функции $g(\mu) \in L_p(\sigma)$ *такой, что*

$$\|g\|_{L_p(\sigma)} \leqq c\|f\|_{L_p(\sigma)}, \quad 1 \leqq p \leqq \infty,$$

где постоянная c не зависит от f.

Доказательство леммы. Подставим в (48) вместо t значение $(2\lambda)/m$ (где $\lambda=(n-2)/2$). Получим

$$\omega_m = 1+\frac{\omega'(0)2\lambda}{m}+\ldots+\frac{\omega^{(n-1)}(0)(2\lambda)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{m^{n-1}}+\frac{\omega^{(n)}(\xi)(2\lambda)^n}{n!}\cdot\frac{1}{m^n}.$$

Мы видим, что последовательность $\{w_m\}_1^\infty$ распадается в сумму последовательностей

$$\{1\}_1^\infty, \left\{\frac{c_1}{m}\right\}_1^\infty, \ldots, \left\{\frac{c_{n-1}}{m^{n-1}}\right\}_1^\infty, \left\{\frac{\omega^{(n)}(\xi)(2\lambda)^n}{n!}\cdot\frac{1}{m^n}\right\}_1^\infty, \tag{49}$$

каждая из которых является p-мультипликатором, $1 \leqq p<\infty$. Для последовательности из 1 это очевидно. Для последовательностей $\{c_j/m^j\}$, $j=1, \ldots, n-1$ подчеркнутое утверждение вытекает из результатов статьи [9]. Дело в том, что мультипликаторный оператор, соответствующий только что написанным последовательностям, изображается сферической сверткой, ядром которой является зональная функция

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+\lambda}{\lambda} \frac{c_j}{m^j} P_m^\lambda(\cos\theta),$$

интегрируемая по σ (что и устанавливается в [9]). Таким образом, применение к упомянутой свертке неравенства Юнга решает вопрос при $j=1, \ldots, n-1$.

Осталось разобраться с действием последнего мультипликатора в (49). На этот раз дело сводится к грубым оценкам ядра

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^{(n)}(\xi)(2\lambda)^n}{n!}\frac{1}{m^n}\frac{m+\lambda}{\lambda} P_m^\lambda(\cos\theta). \tag{50}$$

Легко проверяется, что написанный ряд сходится абсолютно и равномерно. В самом деле, в силу условий леммы, имеем: $|\omega^{(n)}(\xi)| \leqq c_0$ при $0 \leqq \xi \leqq n-2$ (это последнее неравенство выполнено при всех $m=1, 2, \ldots$). Кроме того (см. [4]),

$$|P_m^\lambda(\cos\theta)| \leqq P_m^\lambda(1)| = \binom{m+2\lambda-1}{m} = O(m^{2\lambda-1}).$$

Поэтому модуль общего члена ряда (50) мажорируется величиной $1/m^2$. Следовательно, сумма ряда (50) есть непрерывная зональная функция и в рассматриваемом случае речь идет об оценке сферической свертки, ядро которой непрерывно. В частности, такое ядро интегрируемо и дело опять сводится к применению неравенства Юнга. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 4. Запишем мультипликатор, соответствующий оператору Λ в виде

$$\sqrt{m(m+n-2)} = m\sqrt{1+\frac{n-2}{m}}, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Функция $\omega(t)=\sqrt{1+t}$ удовлетворяет условиям леммы 4. Поэтому последовательность

$$\omega_n = \sqrt{1+\frac{n-2}{m}}, \quad m = 1, 2, \dots$$

задает ϱ-мультипликатор при $1 \leqq p \leqq \infty$. Обозначим соответсвующий этому мултипликатору оператор через Ω. Тогда имеем $\Lambda = S\Omega$ и следовательно

$$\|\Lambda T_m\|_{L_p} = \|S\Omega T_m\|_{L_p} \leqq c_m \|\Omega T_m\|_{L_p}. \tag{51}$$

На последнем шаге мы воспользовались тем, что мультипликаторный оператор Ω переводит T_m в сферический многочлен степени m и применили теорему 1. Осталось воспользоваться ограниченностью оператора Ω в $L_p(\sigma)$, чтобы из (51) получить неравенство, утверждаемое теоремой 4.

Замечание 2. Из теоремы 4 для натуральных степеней оператора Λ получаем неравенство

$$\|\Lambda^k T_m\|_{L_p(\sigma)} \leqq cm^k \|T_m\|_{L_p(\sigma)}, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{52}$$

При четных $k=2l$ неравенство (52) превращается в хорошо известное неравенство для степеней оператора D

$$\|D^l T_m\|_{L_p(\sigma)} \leqq cm^{2l} \|T_m\|_{L_p(\sigma)}, \quad l = 1, 2, \dots .$$

Отметим, что в случае произвольных положительных k оценка (52) анонсирована в работе [10].

Замечание 3. По существу нашими рассуждениями доказано неравенство Бернштейна для оператора с мультипликатором $\{m\omega_m\}$, где ω_m берется из леммы 4.

Литература

[1] А. Л. Шагинян, О. наилучших приближениях гармоническими многочленами в пространстве, *ДАН СССР*, **90** (1953), 141—144.

[2] Е. Г. Гольштейн, Некоторые оценки для производных гармонических многочленов, *Исследования по совр. пробл. теории функций компл. переменного,* М. Физматгиз (1961), 171—180.

[3] Д. К. Угулава, О приближении функций, суммируемых в n-ой степени, гиперсферическими полиномами. *Тр. Вычисл. центра АН Груз. ССР*, **16** (1976), 86—101.

[4] Г. Бэйтман и А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, Наука, 1974.

[5] E. M. Stein, Interpolation in polynomial classes and Markoff's inequality, *Duke Math. J.*, **24** (1957), 467—476.

[6] E. Kogbetliantz, Recherches sur la sommabilité des séries ultraspheriques par la méthode de moyennes arithmetiques, *J. Math. Pures Appl. (3)*, **9** (1924), 107—187.

[7] S. Pawelke, Über die Approximationsordnung bei Kugelfunktionen und algebraischen Polynomen, *Tôhoku Math. J.*, **24** (1972), 473—486.

[8] M. H. Taibleson, On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space, *J. Math. Mech.*, **13** (1964), 407—479.

[9] R. Askey and St. Wainger, On the behaviour of special classes of ultraspherical expansions I, II, *J. Analyse Math.*, **15** (1965), 193—220, 221—244.

[10] В. А. Иванов, О неравенствах Бернштейна—Никольского и Фавара на компактных однородных простраствах ранга I, *Успехи Матем. наук*, **38** (1983), 179—180.

117966, ГСП-1, МОСКВА, СССР
МИАН СССР, УЛ. ВАВИЛОВА 42